

**Istituto Nazionale di Alta Matematica "F. Severi"**

**SVOLGIMENTO PROVA SCRITTA DEL 14 OTTOBRE 2016**

Esponiamo qui sotto le soluzioni dei problemi proposti. Naturalmente, altre soluzioni sono possibili e tutte, purché corrette, sono state ritenute valide.

SVOLGIMENTO GRUPPO A

**Esercizio A1.** Partendo dal risultato (noto) che le successioni  $\{\sin n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $\{\cos n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sono dense in  $[-1, 1]$ , dimostrare che:

- (1)  $\{\sin(2n+1)\}_{n \in \mathbb{N}}$  (e  $\{\cos(2n+1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ) sono dense in  $[-1, 1]$ ;
- (2) la successione  $\{\cos n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$  non ha limite per  $n \rightarrow \infty$ .

*Dimostrazione.* Osserviamo innanzitutto che dal risultato citato segue che la successione  $\{(\cos n, \sin n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  è densa sulla circonferenza unitaria  $S^1$ .

- (1) Consideriamo  $\{\sin(2n+1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Si ha

$$\sin(2n+1) = 2\alpha \sin n \cos n + \beta(1 - 2\sin^2 n)$$

dove  $\alpha = \cos 1$ ,  $\beta = \sin 1 > 0$ . Sia  $x \in [-1, 1]$  e  $n_k$  tale che

$$(\sin n_k, \cos n_k) \rightarrow (x, \sqrt{1-x^2}).$$

Posto

$$f(x) = 2\alpha x \sqrt{1-x^2} + \beta(1 - 2x^2)$$

sarà  $\sin(2n_k+1) \rightarrow f(x)$ . Pertanto  $f([-1, 1]) \subset \{\sin(2n+1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ . D'altro canto  $f$  è continua e  $\pm 1 \in f([-1, 1])$  in quanto, ad esempio,

$$f\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{2}}\right) = 1 \quad \text{e} \quad f\left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}}\right) = -1$$

Ne segue che  $[-1, 1] \subset f([-1, 1])$  e la tesi è provata.

- (2) Supponiamo per assurdo che  $\cos n^2 \rightarrow L$  e, fissato  $x \in [-1, 1[$ , sia

$$\cos(2n_k+1) \rightarrow x.$$

Allora

$$\cos(n_k+1)^2 = \cos n_k^2 \cos(2n_k+1) - \sin n_k^2 \sin(2n_k+1)$$

da cui

$$|L|(1-x) = \sqrt{(1-L^2)(1-x^2)}.$$

Ne segue che  $L^2 = (1+x)/2$ , in contrasto con l'unicità del limite.

□

**Esercizio A2.** Dimostrare che

$$\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2} dx \leq 4 \int_0^1 |f'(x)|^2 dx$$

per ogni  $f \in C^1([0, 1])$  tale che  $f(0) = 0$ .

*Dimostrazione.* Osservato che  $x \mapsto f(x)/x$  si prolunga con continuità su  $[0, 1]$ , risulta

$$0 \leq \int_0^1 \left( 2f'(x) - \frac{f(x)}{x} \right)^2 dx = \int_0^1 \left( 4|f'(x)|^2 - 4 \frac{f(x)f'(x)}{x} + \frac{|f(x)|^2}{x^2} \right) dx.$$

Quindi, integrando per parti,

$$0 \leq \int_0^1 \left( 4|f'(x)|^2 - \frac{|f(x)|^2}{x^2} \right) dx - 2|f(1)|^2$$

da cui segue la tesi.

□

**Esercizio A3.** Dato  $\alpha \in [0, 1]$ , si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) - x(t) \\ \dot{y}(t) = \alpha \sin x(t) - y(t) \end{cases} \quad (S)$$

- (1) Risolvere (S) per  $\alpha = 0$ .
- (2) Provare che, per ogni  $\alpha \in [0, 1]$ , l'origine  $(0, 0)$  è l'unico punto stazionario (o di equilibrio) per il sistema (S).
- (3) Studiare la stabilità di  $(0, 0)$  al variare di  $\alpha$  in  $[0, 1]$ .

*Dimostrazione.* (1)  $x(t) = (a + bt)e^{-t}$ ,  $y(t) = be^{-t}$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ).

(2) Per  $\alpha \in ]0, 1]$  si ha che

$$\begin{cases} 0 = y - x \\ 0 = \alpha \sin x - y \end{cases}$$

ammette la sola soluzione  $x = 0 = y$ . Infatti, per  $x \neq 0$  si ha che

$$\frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{1}{\alpha}.$$

Per  $\alpha = 0$  otteniamo immediatamente  $x = 0 = y$ .

(3) Per  $\alpha \in [0, 1[$  possiamo studiare la linearizzazione di  $(S)$  in  $(0, 0)$ . Posto

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} y - x \\ \alpha \sin x - y \end{pmatrix}$$

si ha

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}$$

che ha autovalori negativi. Pertanto  $(0, 0)$  è asintoticamente stabile.

Per  $\alpha = 1$ , poniamo  $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ . Allora

$$\nabla V(x, y) \cdot f(x, y) = -(x^2 + y^2) + xy + y \sin x \leq -(x^2 + y^2) + 2|x||y| \leq 0$$

Pertanto  $V$  è una funzione di Liapunov per  $(0, 0)$  che risulta quindi stabile.  $\square$

**Esercizio A4.** Data  $f \in \mathcal{C}^1(]a, b[)$ , poniamo

$$N = \{x \in ]a, b[ : f'(x) = 0\}.$$

Dimostrare che  $f(N)$  ha misura nulla (secondo Lebesgue).

*Dimostrazione.* Supponiamo innanzitutto  $-\infty < a < b < +\infty$ . Fissato  $\epsilon > 0$  sia

$$A_\epsilon = \{x \in ]a, b[ : |f'(x)| < \epsilon\}.$$

Poichè  $A_\epsilon$  è aperto in  $]a, b[$  esisteranno intervalli aperti disgiunti  $\{I_n^\epsilon\}$  tali che

$$A_\epsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^\epsilon.$$

Per ogni  $x, y \in I_n^\epsilon$  si ha  $|f(y) - f(x)| \leq \epsilon|y - x|$ . Pertanto

$$|f(N)| \leq \left| f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^\epsilon\right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} |f(I_n^\epsilon)| \leq \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} |I_n^\epsilon| \leq \epsilon(b - a).$$

Ne segue che  $|f(N)| = 0$ . Se poi  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  si ragiona per approssimazione.  $\square$

**Esercizio A5.** Due amici si danno appuntamento in un bar tra le 10 e le 11 con l'accordo che ciascuno dei due, non trovando l'amico al proprio arrivo, attende 10 minuti e poi va via. Calcolare la probabilità che i due amici si incontrino.

*Dimostrazione.* Rappresentando le coppie dei tempi di arrivo dei due amici come punti  $(x, y) \in [0, 1]^2$ , si ha che la probabilità che i due amici si incontrino è data da

$$\left| \left\{ (x, y) \in [0, 1]^2 : |x - y| \leq \frac{1}{6} \right\} \right| = \frac{11}{36}.$$

$\square$

## SVOLGIMENTO GRUPPO B

**Esercizio B1.** Sia  $B$  un anello.

(i) **(6 punti)** Supponendo che si abbia  $b^2 = b$ , per ogni  $b \in B$ , mostrare che  $B$  è commutativo.

(ii) **(1 punto)** Supponiamo invece che si abbia  $b^3 = b$ , per ogni  $b \in B$ . Mostrare che se  $x, y \in B$  allora  $xy = 0$  se e solo se  $yx = 0$ .

(iii) **(3 punti)** Ipotesi come in (ii). Sia  $c \in B$  tale che  $c = c^2$ . Utilizzare (ii) per mostrare che  $c$  è centrale, cioè che per ogni  $x \in B$  si ha  $cx = xc$ .

(iv) **(1 punto)** Ipotesi come in (ii). Sia  $b \in B$ . Utilizzare (iii) per mostrare che  $b^2$  è centrale.

(v) **(3 punti)** Ipotesi come in (ii). Sia  $b \in B$ . Mostrare che  $b + b^2 = (b + b^2)^3 = (b + b^2)^2 + (b + b^2)^2$ , e concludere quindi, usando (iv), che  $b$  è centrale, e che dunque  $B$  è commutativo.

**Svolgimento** (i) Per ogni  $b \in B$  si ha  $b+b = (b+b)^2 = b^2+b^2+b^2+b^2 = b+b+b+b$ , donde, cancellando,  $b + b = 0$  e  $B$  ha caratteristica 2. Se ora  $x, y \in B$  si ha  $x + y = (x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x + xy + yx + y$ , donde, cancellando,  $0 = xy + yx$ , e dato che la caratteristica di  $B$  è 2, si ottiene  $xy = yx$ .

(ii)  $xy = (xy)^3 = x(yx)(yx)y = x00y = 0$ .

(iii)  $0 = cx - c^2x = c(x - cx) = (x - cx)c = xc - cxc$ , donde  $xc = cxc$ . Similmente  $0 = xc - xc^2 = (x - xc)c = c(x - xc) = cx - cxc$ , donde  $cx = cxc$ . Confrontando,  $xc = cx$ .

(iv)  $b^2 = b(b^3) = (b^2)^2$ .

(v)  $b+b^2 = (b+b^2)^3 = (b+b^2)^2(b+b^2) = (b+b^2+b+b^2)(b+b^2) = (b+b^2)^2 + (b+b^2)^2$ , da cui  $b = (b + b^2)^2 + (b + b^2)^2 - b^2$ , e per (iv)  $b$  è centrale.

**Esercizio B2.** Si consideri  $\mathbb{R}^3$  come spazio vettoriale con  $e = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  la sua base canonica. Sia  $F \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  definito da

$$F(\mathbf{e}_1) = \frac{3}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_3, \quad F(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2, \quad F(\mathbf{e}_3) = -\frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_3.$$

(i) **(2 punti)** Stabilire se l'endomorfismo  $F$  è triangolabile su  $\mathbb{R}$ .

(ii) **(3 punti)** Stabilire se il polinomio minimo  $m_F(x) \in \mathbb{R}[x]$  ed il polinomio caratteristico  $p_F(x) \in \mathbb{R}[x]$  dell'endomorfismo  $F$  coincidono (a meno del segno).

(iii) **(3 punti)** Verificare che, a meno dell'ordine dei blocchi, la forma canonica di Jordan di  $F$  è

$$\begin{pmatrix} J_2 & O_{2,1} \\ O_{1,2} & J_1 \end{pmatrix},$$

dove  $J_2$  e' un blocco di Jordan  $2 \times 2$ ,  $J_1$  e' un blocco di Jordan  $1 \times 1$ ,  $O_{2,1}$  e' la matrice colonna  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $O_{1,2}$  e' la matrice riga  $(0 \ 0)$ .

(iv) **(4 punti)** Notazione come in (iii). Siano

$$A = \begin{pmatrix} J_2 & O_{2,1} \\ O_{1,2} & J_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} J_1 & O_{1,2} \\ O_{2,1} & J_2 \end{pmatrix}.$$

Determinare il sottogruppo  $H \leq GL(3, \mathbb{R})$  generato dagli elementi  $A$  e  $B$ .

**Svolgimento** (i) La matrice rappresentativa in base  $e$  di  $F$  e' la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Notiamo che  $tr(A) = 3$ ,  $det(A) = 1$  mentre la somma dei minori principali e'  $\sigma = \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 3$ . Pertanto il polinomio caratteristico di  $F$  e'

$$p_F(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = -(x-1)^3.$$

Poiche' lo spettro di  $F$  e'  $\{1\} \subset \mathbb{R}$ ,  $F$  e' triangolabile su  $\mathbb{R}$ .

(ii) Per definizione di polinomio minimo,  $m_F(x) \in \mathbb{R}[x]$  e' un polinomio monico, non costante ed e' un divisore di  $p_F(x)$ . Pertanto  $m_F(x)$  e' della forma  $(x-1)^n$ , con  $1 \leq n \leq 3$ . Denotata con  $I$  la matrice identita', notiamo che

$$A - I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

non e' la matrice nulla, quindi  $n > 1$ . Visto che  $(A - I)^2 = O$ , dove  $O$  denota la matrice nulla  $3 \times 3$ , si deduce che  $m_F(x) = (x-1)^2$  e che quindi  $m_F(x)$  e' un divisore proprio di  $p_F(x)$  in  $\mathbb{R}[x]$ .

(iii) Visto che  $rg(A - I) = 1$ , l'autospazio  $Ker(A - I)$  relativo all'autovalore 1 ha dimensione 2. Quindi  $F$  ha due blocchi di Jordan, necessariamente uno dei quali di ordine il grado del polinomio minimo  $m_F(x)$ . A meno dell'ordine dei blocchi di Jordan, la forma canonica di Jordan di  $F$  e' pertanto come descritta nel testo dell'esercizio.

(iv) Si verifica direttamente che l'insieme delle matrici unitriangolari superiori

$$u(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  forma un sottogruppo  $U$  di  $GL(3, \mathbb{Z}) \subset GL(3, \mathbb{R})$ , e quindi  $H \leq U$ . D'altra parte definita  $C := A^{-1}B^{-1}AB$  si ha  $B^b A^a C^c = u(a, b, c)$ .

**Esercizio B3.** Si consideri  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  il piano affine reale, con riferimento affine  $RA(O; x, y)$ . Sia data  $C \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  la curva piana di equazione cartesiana

$$f(x, y) = y^3 + y^2 - x^2 - 2x - 1 = 0.$$

(i) **(2 punti)** Determinare i punti singolari di  $C$  e le equazione delle tangenti principali nei punti singolari.

(ii) **(4 punti)** Determinare una parametrizzazione razionale di  $C$  e studiare iniettività e regolarità della parametrizzazione determinata.

(iii) **(4 punti)** Considerando l'inclusione naturale

$$\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \quad (x, y) \rightarrow [1, x, y],$$

dove  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  il piano proiettivo reale, verificare che  $C$  è non-singolare nei suoi punti impropri.

(iv) **(2 punti)** Verificare che  $C$  possiede un unico punto di flesso all'infinito e si calcoli l'equazione cartesiana omogenea della retta (proiettiva) tangente inflessionale.

**Svolgimento** (i) Considerando

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (-2x - 2, 3y^2 + 2y) = (0, 0)$$

si ottengono i punti  $P = (-1, 0)$  e  $Q = (-1, -\frac{2}{3})$ , il secondo dei quali non appartiene a  $C$ . Pertanto  $C$  è singolare esclusivamente in  $P$ .

L'equazione complessiva delle tangenti principali nel punto singolare  $P$  è:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) (x+1)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) (x+1)y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) y^2 = 0,$$

i.e.

$$-2(x+1)^2 + 2y^2 = 0.$$

Pertanto le tangenti principali a  $C$  in  $P$  sono le due rette

$$y = \pm(x+1)$$

e  $P$  è dunque un punto doppio ordinario equivalentemente *nodale* per  $C$ .

(ii) Consideriamo il fascio di rette

$$\{y = t(x+1)\}_{t \in \mathbb{R}},$$

di centro il punto  $P$ . Il sistema di intersezione di  $C$  con la retta  $r_t : y = t(x+1)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  parametro, è dato da

$$\begin{cases} (x+1)^2(t^3(x+1) + (t^2-1)) = 0 \\ y - t(x+1) = 0 \end{cases}$$

Per  $t \neq \pm 1$  la retta  $r_t$  ha, fuori del punto  $P$ , intersezione con la curva  $C$  il punto  $Q_t = \left(\frac{1-t^2-t^3}{t^3}, \frac{1-t^2}{t^2}\right)$  ed ivi l'intersezione e' semplice. Invece per  $t = \pm 1$ , che corrispondono ad i coefficienti angolari delle due tangenti principali a  $C$  in  $P$ , le rette  $r_{\pm 1}$  hanno intersezione con  $C$  esclusivamente in  $P$ . Ciascuna di queste due rette ha ivi molteplicita' di intersezione 3.

La precedente analisi fornisce una parametrizzazione razionale di  $C$ , definita in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , data da:

$$\underline{\alpha}(t) = (x(t), y(t)) := \left(\frac{1-t^2-t^3}{t^3}, \frac{1-t^2}{t^2}\right).$$

La parametrizzazione  $\underline{\alpha}(t)$ , laddove definita, non e' iniettiva (visto che  $\underline{\alpha}(1) = \underline{\alpha}(-1)$ ) ma e' regolare (visto che  $\underline{\alpha}'(t) = (x'(t), y'(t)) = \left(\frac{t^2-3}{t^4}, \frac{-2}{t^3}\right) \neq (0,0)$  per ogni  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ).

(iii) Denotiamo con  $\overline{C}$  il completamento proiettivo di  $C$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  e poniamo  $[x_0, x_1, x_2]$  coordinate omogenee in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Abbiamo allora che l'equazione omogenea che definisce  $\overline{C}$  e'

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_2^3 - x_0x_1^2 + x_0x_2^2 - 2x_0^2x_1 - x_0^3 = 0.$$

I punti impropri di  $C \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  sono determinati dall'intersezione di  $\overline{C}$  con la retta di equazione  $x_0 = 0$ , che e' esclusivamente il punto  $H := [0, 1, 0]$ . Le derivate parziali di  $F(x_0, x_1, x_2)$  valutate in  $H$ , forniscono la terna  $(-1, 0, 0)$ , pertanto  $H$  e' non-singolare per  $\overline{C}$ .

(iv) La retta  $x_0 = 0$  ha molteplicita' di intersezione 3 con  $\overline{C}$  in  $H$ , che e' non-singolare per  $\overline{C}$ . Ne segue che  $x_0 = 0$  e' ivi tangente a  $\overline{C}$ , che  $H$  e' punto di flesso per  $\overline{C}$  e che la tangente inflessionale e' proprio  $x_0 = 0$ . Con procedimento alternativo, si puo' arrivare alla medesima conclusione determinando l'equazione della curva nella carta affine di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  dove  $x_1 \neq 0$ .

**Esercizio B4.** Sia data la parametrizzazione

$$\begin{aligned} \underline{x}: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longrightarrow (u, v, uv). \end{aligned}$$

(i) **(2 punti)** Stabilire se  $\underline{x}(u, v)$  e' una parametrizzazione regolare, iniettiva e determinare l'equazione cartesiana della superficie immagine  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ .

(ii) **(3 punti)** Classificare i punti di  $\Sigma$ .

(iii) **(4 punti)** Preso  $P = (1, 1, 1) \in \Sigma$ , determinare curvatures principali, tangenti principali e tangenti asintotiche di  $\Sigma$  in  $P$ .

(iv) **(3 punti)** Determinare le linee asintotiche di  $\Sigma$  e calcolare il vettore curvatura in ciascun punto di esse.

**Svolgimento** (i) La parametrizzazione e' banalmente iniettiva. Notiamo inoltre che  $\underline{x}_u = (1, 0, v)$  e  $\underline{x}_v = (0, 1, u)$  pertanto la parametrizzazione e' anche regolare. L'equazione cartesiana di  $\Sigma$  e' data da  $z = xy$ ; pertanto  $\Sigma$  e' un paraboloido iperbolico (od a sella).

(ii) Proprio perche'  $\Sigma$  e' un paraboloido iperbolico, tutti i suoi punti sono iperbolici. Alternativamente, con conti espliciti otteniamo che i coefficienti della prima forma quadratica fondamentale sono

$$E = \underline{x}_u \cdot \underline{x}_u = 1 + v^2, \quad F = \underline{x}_u \cdot \underline{x}_v = uv, \quad G = \underline{x}_v \cdot \underline{x}_v = 1 + u^2,$$

i coefficienti della seconda forma quadratica fondamentale sono

$$L = 0, \quad M = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}, \quad N = 0$$

quindi la curvatura Gaussiana in ogni punto e'

$$K(u, v) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{(1 + u^2 + v^2)^2} < 0, \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

(iii) Il punto  $P$  corrisponde a  $(u, v) = (1, 1)$ . Pertanto la curvatura Gaussiana in  $P$  e'  $K(P) = -\frac{1}{9}$  mentre la curvatura media e'  $H(P) = \frac{1}{2} \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2} = -\frac{\sqrt{3}}{9}$ . Le curvature principali in  $P$  sono le soluzioni dell'equazione

$$x^2 + 2\frac{\sqrt{3}}{9}x - \frac{1}{9} = 0,$$

i.e. la curvatura minima e'  $k_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  e la curvatura massima e'  $k_2 = \frac{\sqrt{3}}{9}$ .

La matrice rappresentativa dell'operatore forma (o di Weingarten) nella base  $\{\underline{x}_u, \underline{x}_v\}$ , per  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  arbitrari, e':

$$A(u, v) := \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

Valutando  $A(u, v)$  nel punto  $P$ , i.e. per  $(u, v) = (1, 1)$ , si ottiene

$$A(1, 1) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{9} & \frac{2\sqrt{3}}{9} \\ \frac{2\sqrt{3}}{9} & -\frac{\sqrt{3}}{9} \end{pmatrix}.$$

La direzione principale relativa a  $k_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  e' data da un qualsiasi autovettore di  $A(1, 1)$  relativo all'autovalore  $k_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ , che risulta e.g.  $(u, v) = (1, -1)$ . Questo autovettore corrisponde al vettore

$$\mathbf{v}_1 = 1(1, 0, 1) - 1(0, 1, 1) = (1, -1, 0) \in T_P(\Sigma) \subset \mathbb{R}^3.$$

Dal teorema spettrale degli operatori autoaggiunti, la direzione principale relativa a  $k_2 = \frac{\sqrt{3}}{9}$  corrisponde a  $(u, v) = (1, 1)$ , cioe' al vettore

$$\mathbf{v}_2 = 1(1, 0, 1) + 1(0, 1, 1) = (1, 1, 2) \in T_P(\Sigma) \subset \mathbb{R}^3.$$

Le relative rette tangenti principali in  $P = (1, 1, 1)$  sono quindi le rette

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(1, -1, 0) \text{ i.e. } z - 1 = 0 = x + y - 2$$

e

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(1, 1, 2) \text{ i.e. } 2x - z - 1 = 0 = x - y.$$

Le direzioni asintotiche in  $P$  sono date invece dalle direzioni che annullano la seconda forma quadratica fondamentale in  $P$ , i.e. sono le direzioni che annullano

$$\frac{2}{\sqrt{3}}uv.$$

Le direzioni asintotiche sono quindi le direzioni delle linee coordinate di  $\Sigma$  e le relative tangenti asintotiche in  $P$  sono le rette

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(1, 0, 1) \text{ i.e. } x - z = 0 = y - 1$$

e

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(0, 1, 1) \text{ i.e. } x - 1 = 0 = y - z.$$

(iv) L'equazione differenziale che definisce le linee asintotiche di  $\Sigma$  e' data da

$$\frac{2}{\sqrt{1+u^2+v^2}}du dv = 0.$$

Le curve integrali di questa equazione differenziale soddisfano quindi o  $du = 0$  oppure  $dv = 0$ , quindi sono o  $u = \text{costante}$  oppure  $v = \text{costante}$ . Le linee asintotiche di  $\Sigma$  sono dunque le immagini delle linee coordinate del piano dei parametri  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  e quindi non sono altro che le rette della doppia rigatura di  $\Sigma$ . Essendo rette, il loro vettore curvatura e' ovunque nullo.